ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ГИДРОПРИВОДА С УЧЕТОМ НЕРАСТВОРЕННОГО ВОЗДУХА В РАБОЧЕЙ ЖИДКОСТИ НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ

Левин В.Л., НИПИокеанмаш, г. Днепропетровск
Шмукин А.А., ДГУ, г. Днепропетровск
Бабич А.П., ДГУ, г. Днепропетровск

В известных работах [1,2] при определении собственных частот гидравлических приводов (ГП) рабочая жидкость рассматривалась как сплошная среда с одинаковыми свойствами в рабочей и сливной магистралях гидропривода. При наличии в жидкости нерастворенного воздуха [3] в любом количестве такой подход неприемлем.

В настоящей работе рассматривается задача нахождения собственных частот колебаний ГП при наличии нерастворенного воздуха на основе дискретных моделей многомассовых систем, разработанных Н.Е.Жуковским [4], С.Н.Кожевниковым [5] и др. При этом уравнения движения дискретных масс жидкости в гидролиниях записываются в идентичной форме.

Отдельно рассматриваются два случая граничных условий: первый, когда на внешних торцах трубопроводов давление постоянно (P=const), и второй, когда на внешних торцах скорость жидкости равна нулю (V=0).

1. Случай гидропривода, когда на внешних торцах P=0 (рис.1). При этом P_1=const; P_2=const; $P_1 \neq P_2$, а сопротивления течению жидкости в гидролиниях и перемещению поршня в гидроцилиндре малы и не учитываются; в связи с быстрым протеканием переходных процессов принимаем адиабатические модули упругости E_1 и E_2, плотности жидкости ρ_1 и ρ_2 в нагнетательной и сливной полостях постоянными в не зависимости от пульсации давления.

Жидкость в каждой подводящей гидролинии длиной $\ell_{тр\,к}$, площадью сечения $f_{тр,к}$; массой $m_к = \rho f_{тр,к}$ с жесткостью $C_{тр\,к} = Ef_{тр,к} / \ell_{тр\,к}$, где к=1;2 - число подводящих гидролиний, разделяется на n равных участков (рис.1а) с массами $m_{k,i} = m_k / n$ и жесткостью $C_{ki} = C_{трк}\, n$; где i - номер дискретного участка гидролинии. В дальнейшем в работе принято $C_{1,i} = C_1$, $C_{2,i} = C_2$, $m_{1,i} = m_1$, $m_{2,i} = m_2$.

Жесткости жидкости в обоих трубопроводах $C_{тр1}$ и $C_{тр2}$ связаны с жесткостями жидкости в поршневой $C_п$ и штоковой $C_{шт}$ полости гидроцилиндров принятыми как сосредоточенные параметры, соотношениями:

$$C_п = C_{тр1}\, e_1\, v_1;\ \ e_1 = \ell_{тр1}/L_п;\ \ v_1 = F_п/f_{тр1};$$

$$C_{шт} = C_{тр2}\, e_2\, v_2,\ \ e_2 = \ell_{тр2}/L_{шт};\ \ v_2 = F_{шт}/f_{тр2},$$

где $L_п$,$L_{шт.}$, $F_п$ и $F_{шт}$ – длины и площади поршневой и штоковой полости гидроцилиндра.

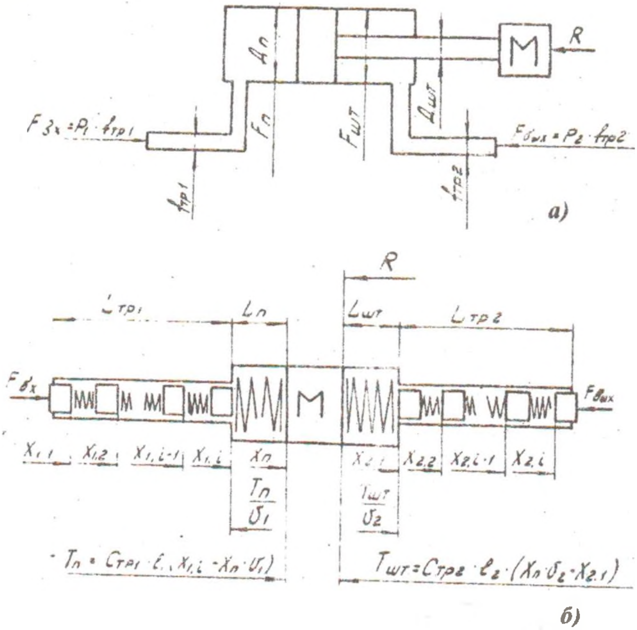


Рис.1. *Гидропривод с p=const на внешних концах трубопровода: а) схема, б) дискретная модель*

Каждая дискретная масса в середине гидролинии находится под воздействием сил сжатия прилегающих упругих элементов $T_{к,i}$ и $T_{к,\,i+1}$, равных:

$$T_{к,\,i} = P_{к,\,i+1}\, f_{тр,к} = C_{трк}(\, x_{к,\,i} - x_{к,\,i+1});$$

$$T_{к,\,i+1} = P_{к,\,i+1}\, f_{тр,к} = C_{трк}(\, x_{к,\,i+1} - x_{к,\,i+2}),$$

где $p_{к,\,i}$ - давление жидкости на всей длине i-го дискретного участка; $x_{к,\,i}$ - перемещение, отсчитываемое от положения, занимаемого дискретной массой в начальный момент.

На поршень гидроцилиндра действует усилие со стороны сжатой жидкости поршневой и штоковой полостей.

$T_п = p_п F_п = C_п(x_{1,i}\ f_{тр\ 1,1}/F_п - x_п) = C_п(x_{1,i} - x_п v_1)/v_1;$

$T_{шт} = p_{шт} F_{шт} = C_{шт}(x_п - f_{тр\ 2,1}\ x_{2,i}\ /F_{шт}),$

где $x_{1,i}$, $x_{2,1}$, $x_п$ - перемещения, отсчитываемые от начального положения конечной дискретной массы первой гидролинии, первой массы второй гидролинии и перемещение самого поршня. В свою очередь, на конечную дискретную массу первой гидролинии со стороны сжатой жидкости поршневой полости действует усилие $T_{1,i}=T_п/v_1$, а на первую массу второй гидролинии со стороны жидкости штоковой полости – усилие $T_{2,i} = T_{шт}/v_2$.

С учетом допущений и выражений зависимостей, принятых при построении дискретной модели гидропривода, систему уравнений движения всех дискретных масс жидкости в гидролиниях и массы поршня с приведенными массами жидкости в полостях гидроцилиндра представим в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
& m_1 x_{1,0} + C_1(x_{1,0} - x_{1,1}) = F_{вх};\\
& m_1 x_{1,1} + C_1(x_{1,1} - x_{1,2}) - C_1 (x_{1,0} - x_{1,1}) = 0;\\
& \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\
& m_1 x_{1,i-1} + C_1(x_{1,i-1} - x_{1,i}) - C_1 (x_{1,i-2} - x_{1,i-1}) = 0;\\
& m_1 x_{1,i} + C_1 e_1 (x_{1,i-1} - x_п\ v_1)/v_1 - C_1(x_{1,i-1} - x_{1,i}) = 0;\\
& M x_п + C_{тр2} e_2(x_п v_2 - x_{2,1}) - C_{тр1} e_1(x_{1,i} - x_п v_1) = R; \qquad (1)\\
& m_2 x_{2,1} + C_2(x_{2,1} - x_{2,2}) - C_{тр2}\ e_2(x_п\ v_2 - x_{2,1})/v_2 = 0;\\
& m_2 x_{2,2} + C_2(x_{2,2} - x_{2,3}) - C_2(x_{2,1} - x_{2,2}) = 0;\\
& \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\
& m_2 x_{2,i-1} + C_2(x_{2,i-1} - x_{2,i}) - (x_{2,i-2} - x_{2,i-1}) = 0;\\
& m_2 x_{2,i} - C_2(x_{2,i-1} - x_{2,i}) = F_{вых},
\end{aligned}
$$

где $F_{вх}$ - усилие от давления жидкости, приложенное к торцу нагнетательной гидролинии; $F_{вых}$ - к торцу сливной; $R=\sum R_{сопр}$ - суммарное усилие сопротивления, приложенное к поршню.

С целью получения системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно усилий во всех упругих связях гидропривода, включая поршневую и штоковую полости, сначала введем обозначения:

$$
\begin{aligned}
& T_{k,i} = C_k(x_{k,i} - x_{k,i+1});\\
& T_{1,i} = C_{тр1}\, e_1\, (x_{1,i} - x_п\ v_1);\quad T_{1,1} = C_{тр1}\, e_1\, (x_{1,i} - x_п\ v_1);\\
& T_{2,i} = C_{тр2}\, e_2\, (x_п\ v_2 - x_{2,1});\\
& T_{2,1} = C_{тр2}\, e_2\, (x_п\ v_2 - x_{2,1}); \qquad (1а)\\
& k_1 = m_{тр}/M;\ \ k_2 = m_{тр2}/M;\ \ b_1 = k_1\ v_1;\ \ b_2 = k_2\ v_2;\\
& \lambda^2_k = C_k/m_k = C_{тр\ ж}\, n^2/m_{ж\ тр,к} = E_к\, n^2/\ell^2_{трк}\,\rho,
\end{aligned}
$$

так как $C_{ki} = E\ f_{тр}/\ell_{тр}/n$ и $m_k = \ell_{тр}\ f_{тр}\,\rho\ /\ n$.

Далее преобразуем систему уравнений (1) следующим образом: все уравнения, кроме среднего, умножим на отношение C_k/m_k; два уравнения, прилегающие к среднему сверху и снизу умножим, кроме того, соответственно на $C_n/v_1\ m_1$ и на $C_{шт}/v_2\ m_2$; среднее уравнение умножим дважды: один раз на $C_{тр}\ v_1\ e_1\ k_1/m_{ж\ тр1}$; второй - на $C_{стр2}\ v_2 e_2\ k_2/m_{ж\ тр2}$ и вычтем из каждого предыдущего уравнения системы (1) последующее:

$$T_{1,1} + 2\lambda^2{}_1\ T_{1,1} - \lambda^2{}_1\ T_{1,2} = \lambda^2{}_1\ F_{вх};$$
$$T_{1,2} + 2\lambda^2{}_1\ T_{1,2} - \lambda^2{}_1\ T_{1,1} - \lambda^2{}_1\ T_{1,3} = 0;$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$T_{1,i-1} + 2\lambda^2{}_1\ T_{1,\,i-1} - \lambda^2{}_1\ T_{1,i-2} - \lambda^2{}_1\ T_{1,i}\ /v_1 = 0;$$
$$T_{1,i} + \lambda^2{}_1\ e_1\ (n_1 + b_1\ v_1)\ T_{1,i}\ -/n^2\ v_1 - \lambda^2{}_1\ e_1 T_{1,i-1}/n_1 - \lambda^2{}_1\ b\ e_1 T_n/\ n_1{}^2 =$$
$$= \lambda^2{}_1\ b_1\ e_1\ R/n^2{}_1;$$
$$T_n + \lambda^2{}_2\ e_2\ (n_2 + b^2\ v_2)\ T_n/n^2\ v_2 - \lambda^2{}_2\ e_2\ T_{2.1}\ /n_2 - \lambda^2{}_2\ b_2\ e_2\ T_{1,i}\ /n_2{}^2 =$$
$$= -\lambda^2{}_2 b_2 e_2 R/n_2{}^2; \qquad (2)$$
$$T_{2,1} + 2\lambda^2{}_2\ T_{2,1} - \lambda^2{}_2\ T_{2,2} - \lambda^2{}_2\ T_n\ /v_2 = 0;$$
$$T_{2,2} + 2\lambda^2{}_2\ T_{2,2} - \lambda^2{}_2\ T_{2,3} - \lambda^2{}_2\ T_{2,1} = 0;$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$T_{2,i-1} + 2\lambda^2{}_2 T_{2,i-1} - \lambda^2{}_2\ T_{2,i} - \lambda^2{}_2\ T_{2,i-2} = 0;$$
$$T_{2,i} + 2\lambda^2{}_2\ T_{2,i} - \lambda^2{}_2\ T_{2,i-1} = \lambda^2{}_2\ F_{вых}.$$

Уравнения системы (2) за исключением двух центральных описывают колебания усилий в упругих связях жесткостью $C_{k,i}$ дискретных масс, жидкости на участках гидролиний длиной $\Delta x = L_{тр,к}/n$. Впервые уравнения вида (2) получил Н.Е.Жуковский в работе [4] при исследовании динамики поездов с помощью многомассовой модели. Примем в качестве решения системы (2) гармоническую функцию

$$T_{k,i} = A_{k,i} \sin\omega t, \qquad (3)$$

где $A_{k,i}$ - постоянные, определяемые начальным состоянием системы; ω- цикловая частота собственных колебаний гидропривода.

Преобразуем систему (2) к виду:

$$[-\omega^2 + 2\,\lambda^2]\ A_{1,1} - \lambda^2{}_1\ A_{1,2} = \lambda^2{}_1\ F_{вх};$$
$$[-\omega^2 + 2\,\lambda^2{}_1]\ A_{1,2} - \lambda^2{}_1\ A_{1,1} - \lambda^2{}_1\ A_{1,3} = 0;$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$[-\omega^2 + 2\,\lambda^2{}_1]\ A_{1,i-1} - \lambda^2{}_1\ A_{1,i-2} - \lambda^2{}_1\ A_{1,i}\ /v_1 = 0;$$
$$[-\omega^2 + \lambda^2{}_1\ e_1\ (n_1 + b_1\ v_1)\ /n_1{}^2\ v_1\ ]A_{1,i} - \lambda^2{}_1\ e_1\ A_{1,i-1}\ /n_1 - \lambda^2{}_1\ b_1\ e_1 A_n\ /n_1{}^2 =$$
$$= R\ \lambda^2{}_1\ b_1\ e_1/n_1{}^2;$$
$$[-\omega^2 + \lambda^2{}_2\ e_2\ (n_2 + b_2\ v_2)\ /n_2{}^2\ v_2\ ]\ A_n - \lambda^2{}_2\ e_2\ A_{2,1}\ /n_2 - \lambda^2{}_2\ b_2\ e_2/n_2{}^2 =$$
$$= -R\lambda^2{}_2 b_2 e_2/n^2{}_2; \qquad (4)$$
$$[-\omega^2 + 2\,\lambda^2{}_2]\ A_{2,1} - \lambda^2{}_2\ A_{2,2} - \lambda^2{}_2\ A_n\ /v_2 = 0;$$

... ...

$[-\omega^2 + 2\lambda^2_2]\, A_{2,i-1} - \lambda^2_2\, A_{2,i-2} - \lambda^2_2\, A_{2,i} = 0;$

$[-\omega^2 + 2\lambda^2_2]\, A_{2,i} - \lambda^2_2\, A_{2,i-1} = -\lambda^2_2\, F_{вых}.$

Уравнение частот получим, приравняв нулю определитель системы (4). При составлении определителя примем $n_1 = n_2 = n$ и введем следующие обозначения:

$$d^1{}_2 = -\omega^2/\lambda^2{}_1;\quad \lambda^2{}_1/\lambda^2{}_2 = 1/r;\quad d^2{}_2 = -\omega^2/r\lambda^2{}_1 = d^2{}_1/r;$$

$$\omega^2/\lambda^2{}_1 + 2 = d^2{}_1 + 2 = a_1;\quad d^2{}_2 + 2 = a_2;\quad a_2 = d^2{}_2/r + 2; \qquad (4a)$$

и учтем, что $r = \lambda^2{}_2/\lambda^2{}_1 = m_{1,i}\, C_{2,i}/C_{1,i}\, m_{2,i} = (E_2/E_1)\,(\ell_{тр1}/\ell_{тр})^2$.

Решение определителя системы (4) с помощью теоремы Лапласа представим в виде:

$$\Delta(a_1,a_2) = \{(-e_1/n\, v_1)\, B_{n-2}(a_1) + [a_1 - 2 + e_1 (n + b_1 v_1)/v_1 n_2{}^2]\, x$$
$$x B_{n-1}(a_1)\}\{e_2 B_{n-2}(a_2)/n v_2 + [a_2 - 2 + e_2(n + b_2 v_2)/n^2 v_2] B_{n-1}(a_2)\} - \qquad (5)$$
$$- b_1 e_1 B_{n-1}(a_1)\, b_2 e_2 B_{n-1}(a_2)/n^2 n^2 = 0,$$

где

$$B_n(a) = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & a \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Здесь: $a_1 = a_2 = a$.

Рекурентное соотношение этого определителя имеет вид:

$$B_n(a) = aB_{n-1}(a) - B_{n-2}(a);\qquad B_n(a)_o = 1. \qquad (7)$$

Сравнивая соотношение (7) с аналогичным соотношением для полиномов Чебышева второго рода $U_n(x) = 2^x U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$ видим, что $B_n(a) = U_n(a/2)$ при $a=2x$, так как $U_n(x) = \sin(n+1)\arccos x/\sqrt{1-x^2}$, то определитель $B_n(a)$, входящий в уравнение частот (5) можно записать в виде: $B_n(a) = \sin(n+1)\arccos a/2/\sqrt{1-a^2/4}$.

Обозначив $\arccos a/2 = \beta$, $x = \cos\beta$ с учетом выражений коэффициентов определителя системы (4), получим:

$$a = 2\cos\beta;\ \omega^2/\lambda^2 = 4\sin^2\beta/2. \qquad (8)$$

Учитывая, что

$$\lambda^2{}_{n=1} = C_{тр\, n=1}/m_{жтр,n=1} = E/\rho\,\ell^2{}_{тр} = a^2{}_{ск.зв}/\ell^2{}_{тр};\quad \lambda^2{}_i = E\, n^2/\rho\,\ell^2{}_{тр} = \lambda^2{}_{n=1}\, n^2,$$

выражение (8) примет вид:

$$\omega^2{}_н/\lambda^2{}_{n=1}\, n^2 = 4\sin^2\beta/2, \qquad (9)$$

где $\omega^2_н$ - квадрат низшей частоты собственных колебаний гидропривода при числе дискретных масс n. Обозначив $\omega^2_n/\lambda^2_{n=1} = \gamma$, из (9) получим $\gamma^2/n^2 = 4\sin^2\beta/2$, откуда следует

$$\beta = \gamma/n \text{ и } \gamma = \omega_n\,\ell_{тр}/a_{ск.зв}. \qquad (10)$$

Так как

$$\omega_n = \gamma_1\,a_{1ск.зв.}/\ell_{тр1} = \gamma_2\,a_{2ск.зв.}/\ell_{тр2};\ \gamma_1 = \gamma_2\sqrt{r}\ (\text{r- см. (4а)}). \qquad (11)$$

Уравнение частот (9) при подстановке $a = \cos\gamma/n$ при $n\to\infty$ примет вид

$$\gamma_1^2\gamma_2^2/b_1 b_2 e_1 e_2 - \gamma_1^2/b_1 e_1 - \gamma_1^2\gamma_2^2\,\mathrm{ctg}\,\gamma_2/v_2 v_1 e_1 b_2 - \gamma_2^2/b_2 e_2 +$$
$$+\gamma^2\,\mathrm{ctg}\gamma_2/b_2 v_2 + \gamma_1\,\mathrm{ctg}\,\gamma_1/v_1 b_1 + \gamma_1^2\gamma_2^2\,\mathrm{ctg}\,\gamma_1\,\mathrm{ctg}\gamma_2/v_1 v_2 b_1 b_2-$$
$$-\gamma_2^2\gamma_1\,\mathrm{ctg}\,\gamma_1/v_1 b_1 b_2 e_2 = 0. \qquad (12)$$

Проверку решения для общего случая несимметричного гидропривода осуществим на частном случае, когда $\gamma_1=\gamma_2=\gamma(E_1=E_2=E)$; $r=1$; $\ell_{тр1}=\ell_{тр2}=\ell$; $d_{тр1}=d_{тр2}=d$; $L_{шт}=L_n=L$; $F_n=F_{шт}=F$; $P_n=P_c=P$.

Уравнение (12) при этом принимает вид:

$$\gamma^2\,\mathrm{ctg}^2\gamma/v^2b^2-(2\gamma^3/vb^2e-2\gamma/bv)\mathrm{ctg}\gamma + \gamma^4/b^2e^2 - 2\gamma^2/b^2 = 0. \qquad (13)$$

Корнями этого уравнения являются:

$\gamma_1 = 0$; при $\gamma_2 = [(K+1/2)\pi, 0]$ $\mathrm{ctg}\,\gamma_2 = 0$;

$\mathrm{ctg}\,\gamma_{3,4} = \gamma\,v/\ell - v\,b/\gamma \pm v\,b/\gamma$, здесь $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_4$ - корни (13).

Так как при корне $\mathrm{ctg}\,\gamma_4 = \gamma\,v/\ell$ коэффициент $b = m_{жтр}\,v/M = 0$, что противоречит постановке задачи, то единственным действительным корнем является

$$\mathrm{ctg}\ \gamma_3 = \gamma\,v/\ell - 2v\,b/\gamma. \qquad (14)$$

Этот результат полностью соответствует случаю определения собственных частот симметричного гидропривода ($P_n = P_c = P_1$, нерастворенный воздух отсутствует и т.д.), рассмотренного в работе [1].

2. Схема гидропривода, в котором на внешних торцах гидролиний скорость жидкости v=0 (рис.2,а). При определении собственных частот используем принятые ранее допущения и обозначения параметров. Учитываем обстоятельство, что в рассматриваемом случае система представляет замкнутый объем, в котором перемещение поршня, например, в сторону поршневой полости (см. рис. 2) на величину Δx_n вызывает в этой полости повышение давления на величину:

$$\Delta P_n = \Delta V\,E/V = (\Delta x_n F_n + \Delta x_{1,i}\,f_{тр1})\,E_1/(F_nL_n + f_{тр1}\,\ell_{тр1}/n), \qquad (15)$$

а давление в штоковой полости уменьшится на величину:

$$\Delta P_{шт} = (-\Delta x_n F_{шт} + \Delta x_{2.1}\,f_{тр2})\,E_2/(F_{шт}L_{шт} + f_{тр2}\,\ell_{тр2}/n), \qquad (16)$$

где $\Delta x_{1,i}$, $\Delta x_{2,1}$- величины положительной и отрицательной деформации жидкости конечного дискретного участка первого трубопровода и первого дискретного участка второго трубопровода.

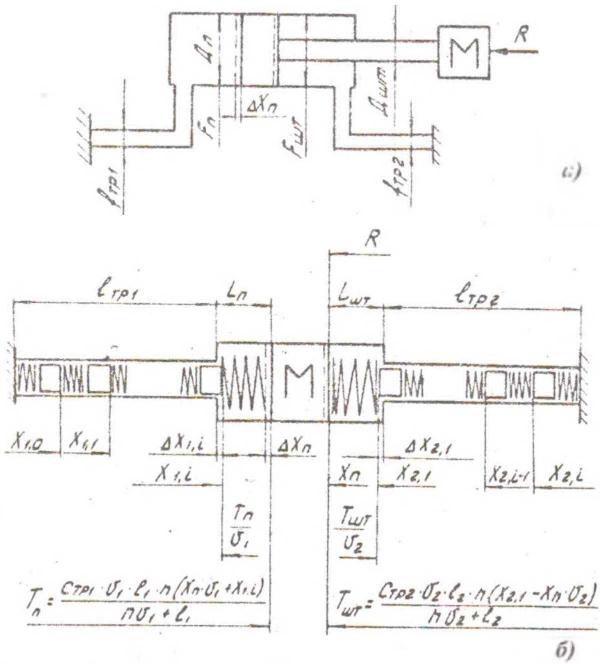


Рис.2. *Гидропривод с V=0 на внешних концах трубопроводов: а – схема; б – дискретная модель*

Для момента времени, когда распределитель внезапно перекрыт и волна сжатия жидкости в гидролинии 1 начала перемещаться от внешнего торца гидролинии к поршню, а поршень продолжает движение в прежнем направлении, систему уравнений движения всех дискретных масс жидкости и поршня представим в следующем виде (здесь $m_1 = m_{1,i}$; $m_2 = m_{2,i}$):

$$m_1 x_{1,1} - C_1 x_{1,1} + C_1 (x_{1,1} - x_{1,2}) = 0;$$
$$m_1 x_{1,2} - C_1 (x_{1,1} - x_{1,2}) + C_1 (x_{1,2} - x_{1,3}) = 0;$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$m_1 x_{1,i-1} - C_1 (x_{1,i-2} - x_{1,i-1}) + C_1 (x_{1,i-1} - x_{1,i}) = 0;$$
$$m_1 x_{1,i} - C_1 (x_{1,i-1} - x_{1,i}) + C_{тр1}\, e_1\, n\, (x_n v_1 + x_{1,i}) /(n v_1 + e_1) = 0;$$
$$-M x_n - C_{тр1} v_1 e_1 n\, (x_n v_1 + x_{1,i})/(n\, v_1 + e_1) + (C_{тр2}\, v_2\, e_2\, n/(n\, v_2 + e_2))\, x$$
$$x(x_{2,1} - x_n v_2) = -R; \qquad (17)$$
$$-m_2 x_{2,1} - C_{тр2}\, e_2\, n\, (x_{2,1} - x_n v_2)/(n\, v_2 + e_2) + C_2 (x_{2,2} - x_{2,1}) = 0;$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$-m_2 x_{2,i-1} - C_2 (x_{2,i-1} - x_{2,i-2}) + C_2 (x_{2,i} - x_{2,i-1}) = 0;$$
$$-m_2 x_{2,1} - C_2 (x_{2,i} - x_{2,i-1}) + C_2\, x_{2,i} = 0.$$

Примем обозначение: $T_{k,i} = C_k (x_{k,i} - x_{k,i+1})$; $T_{1,0} = C_1 x_{1,i}$; $T_{2,i} = C_2 x_{2,i}$; $T_n = C_{тр1} e_1 v_1 n (x_n v_1 + x_{1,i})/(n v_1 + e_1)$; $T_{шт} = C_{тр2} e_2 n (x_n v_2 - x_{2,1})/(n v_2 + e_2)$ и введем их в систему (17)

$$
\begin{aligned}
&m_1 x_{1,i} - T_{1,0} + T_{1,1} = 0;\\
&\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\
&m_1 x_{1,i-1} - T_{1,i-2} + T_{1,i-1} = 0;\\
&m_1 x_{1,i} - T_{1,i-1} + T_n/v_1 = 0;\\
&-M x_n - T_n - T_{шт} = -R;\\
&- m_2 x_{2,1} + T_{шт}/v_2 - T_{2,1} = 0;\\
&\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\
&- m_2 x_{2,i-1} + T_{2,i-2} - T_{2,i-1} = 0;\\
&- m_2 x_{2,i} + T_{2,i-1} + T_{2,i} = 0.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Для получения системы уравнений в виде вторых производных от усилий упругих связей, преобразуем систему уравнений (18) следующим образом: все уравнения, кроме среднего (движение поршня), умножим на C_k/m_k ; среднее умножим дважды; один раз на $C_{тр1}\ v_1^2\ e_1\ n\ k_1/\ (n\ v_1 + e_1)\ m_{жтр\ 1}$, где $k_1 = m_{жтр1}/M$; второй раз на $C_{тр2}\ v^2{}_2\ e_2\ n\ k_2/\ (n\ v_2 + e_2)\ m_{жтр\ 2}$, где $k_2 = m_{жтр2}/M$.

Кроме того, уравнение движения массы $m_{1,i}$ умножим на $C_{тр1}\ v_1\ e_1\ n\ /\ m_1\ (n\ v_1 + e_1)$; уравнение движения массы $m_{2,1}$ умножим на $C_{тр2}\ v_2\ e_2\ n\ /\ m_2(\ n\ x\ v_2 + e_2)$ и вычитая из каждого предыдущего уравнения системы (18) последующее, а крайние уравнения системы представив как линейные дифференциальные уравнения относительно $T_{1,0}$ и $T_{2,1}$ получим ($\lambda^2{}_к$- см. (1а)):

$$
\begin{aligned}
&T_{1,o} - \lambda^2{}_1\ T_{1,o} + \lambda^2{}_1\ T_{1,1} = 0;\\
&T_{1,1} + 2\lambda^2{}_1\ T_{1,1} - \lambda^2{}_1\ T_{1,0} - \lambda^2{}_1\ T_{1,2} = 0;\\
&\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\
&T_{1,i-1} + 2\lambda^2{}_1\ T_{1,i-1} - \lambda^2{}_1\ T_{1,i-2} - \lambda^2{}_1\ T_n/v_1 = 0;\\
&T_n + \lambda^2{}_1\ [v_1^2\ e_1 k_1/n(nv_1+e_1)+e_1/n\ v_1]T_n - (\lambda^2{}_1 v_1 e_1/(nv_1+e_1))T_{1,i-1} +\\
&+ (\lambda^2{}_1\ v_1^2\ e_1\ k_1\ /n\ (nv_1 + e_1))\ T_{шт} = \lambda^2{}_1\ v_1^2\ e_1\ k_1\ R/(\ nv_1 + e_1)n;\\
&-T_{шт} - \lambda^2{}_2[v^2{}_2 e_2 k_2/n(nv_2+e_2)+e_2/(nv_2+e_2)]T_{шт} - (\lambda^2{}_2 v_2{}^2 e_2 k_2/n(nv_2+e_2))x\\
&xT_n - \lambda^2{}_2\ v_2\ e_2\ T_{2,1}/(\ nv_2 + e_2) = [-\lambda^2{}_2\ (v^2{}_2\ e_2\ k_2)/\ (nv_2 + e_2)\ n]\ R;\\
&-T_{2,1} - 2\lambda^2{}_2\ T_{2,1} + \lambda^2{}_2\ T_{шт}/v_2 + \lambda^2{}_2\ T_{2,2} = 0;\\
&-T_{2,2} - 2\lambda^2{}_2\ T_{2,2} + \lambda^2{}_2\ T_{2,1} + \lambda^2{}_2\ T_{2,3} = 0;\\
&\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\
&-T_{2,i-1} - 2\lambda^2{}_2\ T_{2,i-1} + \lambda^2{}_2\ T_{2,i-2} + \lambda^2{}_2\ T_{2,i} = 0;\\
&-T_{2,i} - \lambda^2{}_2\ T_{2,i-1} + \lambda^2{}_2\ T_{2,i} = 0.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Принимая в качестве решения системы (19) гармоническую функцию

$T_{k,i} = A_{k,i} \sin \omega t$ (аналогично (3)), преобразуем (19) к виду:

$$[-\omega^2 - \lambda^2_1] A_{1,0} + \lambda^2_1 A_{1,1} = 0;$$
$$[-\omega^2 + 2\lambda^2_1] A_{1,1} - \lambda^2_1 A_{1,0} - \lambda^2_1 A_{1,2} = 0;$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (20)$$
$$[-\omega^2 + 2\lambda^2_1] A_{1,i-1} - \lambda^2_1 A_{1,i-2} - \lambda^2_1 A_n/v_1 = 0;$$
$$\{-\omega^2 + \lambda^2_1 [v_1^2 e_1 k_1/n(nv_1+e_1) + e_1/nv_1]\} A_n - [\lambda^2_1 v_1 e_1/(n v_1 + e_1)] A_{1,i-1} +$$
$$+ [\lambda^2_1 v_1^2 e_1 k_1/(nv_1 + e_1) n] A_{шт} = [\lambda^2_1 v_1^2 e_1 k_1/(nv_1 + e_1) n] R;$$
$$\{-\omega^2 - \lambda^2_2 [v^2_2 e_2 k_2/n(nv_2+e_2) + e_2/(nv_2+e_2)]\} A_{шт} - [\lambda^2_2 v_2 e_2/(nv_2+e_2)] x$$
$$x A_{2,1} - [\lambda^2_2 v^2_2 e_2 k_2/(nv_2 + e_2) n] A_n = -[\lambda^2_2 v^2_2 e_2 k_2/(nv_2 + e_2) n] R;$$
$$[\omega^2 - 2\lambda^2_2] A_{2,1} + \lambda^2_2 A_{шт}/v_2 + \lambda^2_2 A_{2,2} = 0;$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$[\omega^2 - 2\lambda^2_2] A_{2,i-1} + \lambda^2_2 A_{2,i-2} + \lambda^2_2 A_{2,i} = 0;$$
$$[\omega^2 + \lambda^2_2] A_{2,i} - \lambda^2_2 A_{2,i-1} = 0.$$

Как и в предшествующем случае, уравнение частот получим, приравняв нулю определитель системы (20).Кроме того, введем обозначение $d_1^2 = -\omega^2/\lambda^2_1$; $d^2_2 = -\omega^2/\lambda^2_2$; $d_1^2 + 2 = a_1$; $d^2_2 = d_1^2/r$; $d^2_2 + 2 = a_2$.

Решение определителя системы (20) с помощью теоремы Лапласа при принятых обозначениях имеет вид:

$$\Delta(a_1, a_2) = (\lambda_1^2)^{2n}\{(a_1-3)a_1-2+(v_1^2 e_2 k_1+e_1 n)/n(nv_1+e_1)]B_{n-1}(a_1) +$$
$$+ [a_1-2+(v_1^2 e_2 k_1+e_1 n)/n(nv_1+e_1)]B_{n-2}(a_1) - e_1(a_1-3)B_{n-2}(a_1)/(nv_1-e_1) -$$
$$-e_1 B_{n-3}(a_1)/(nv_1+e_1)\} x \{-[a_2-2+(v^2_2 e_2 k_2+e_2 n)/n(nv_2+e_2)](a_2-3)B_{n-1}(a_2) -$$
$$- [a_2-2+(v^2_2 e_2 k_2+e_2 n)/n(nv_2+e_2)]B_{n-2}(a_2) + e_2(a_2-3) B_{n2}(a_2)/(nv_2+e_2) +$$
$$+ e_2 B_{n-3}(a_2)/nv_2 + e_2)\} + \{v_1^2 e_1 k_1 (a_2-3) B_{n-2}(a_1)/n(nv_1+e_1) +$$
$$+ (v_1^2 e_1 k_1 B_{n-3}(a_1)/n(nv_1+e_1)\} \cdot \{(v_2^2 e_2 k_2 (a_2-3)B_{n-2}(a_2)/n(nv_2+e_2) +$$
$$+ (v^2_2 e_2 k_2 B_{n-3}(a_2)/n(nv_2+e_2)\} = 0. \qquad (21)$$

Если выразить a через γ на основании (8) - (10), уравнение (21) при $n \to \infty$ примет вид:

$$-\Upsilon_1\Upsilon_2 e_1 e_2 tg\Upsilon_1 tg\Upsilon_2 + [\Upsilon_1 e_1 v^2_2 e_2 k_2 - \Upsilon_1 \Upsilon_2^2 e_1 v_1] tg\Upsilon_1 + \qquad (22)$$
$$+ [\Upsilon_2 e_2 v_1^2 e_1 k_1 - \Upsilon_1^2 \Upsilon_2 e_2 v_1] tg\Upsilon_2 + [\Upsilon_2^2 v_1^2 e_1 k_1 v_2 + \Upsilon_1^2 v^2_2 e_2 k_2 v_1 -$$
$$-\Upsilon_1^2 \Upsilon_2^2 v_1 v_2] = 0.$$

Проверка решения выполнена при условиях, приведенных при рассмотрении первой модели.

При этом уравнение (22) принимает вид:

$$-\Upsilon^2 e^2 tg^2\Upsilon + 2(\Upsilon e^2 v^2 k - \Upsilon^3 e v) tg\Upsilon + 2\Upsilon^2 v^3 e k - \Upsilon^4 v = 0. \qquad (23)$$

Решая это уравнение относительно $tg\Upsilon$, имеем:

$$tg\Upsilon_1 = -\Upsilon v/e + 2(v^2 k)/\Upsilon, \qquad (24)$$

где $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \ldots, \Upsilon_4$ - корни $tg\Upsilon_2 = -\Upsilon v/e$; (25)

т.е. $k = m_{жтр}/m = 0$, что противоречит условию задачи.

При $\Upsilon_3 = 0$ и $\Upsilon_4 = [k\pi, 0]$, $tg\Upsilon_{3,4} = 0$. (26)

Следовательно, единственным корнем уравнения (23) является выражение (24). Этот результат соответствует случаю определения собственных частот симметричного гидропривода при отсутствии нерастворенного воздуха в системе, рассмотренного в работах [1] и [7].

3. Численный метод определения собственных частот колебаний гидропривода для обоих схем граничных условий. Численный метод сводится к решению 2-х пар систем уравнений: для первого случая это (12) и (11); для второго – (22) и (11). Введем обозначения: $b_1=k_1v_1$; $b_2=k_2v_2$; $a_1=1/b_1b_2e_1e_2$; $a_2=1/b_1e_1$; $a_3=1/v_2b_1e_1b_2$; $a_4=1/b_2e_2$; $a_5=1/b_2v_2$; $a_6=1/v_1b_1$; $a_7=1/v_1v_2b_1b_2$; $a_8=1/v_1 b_1 b_2 e_2$; $a_9=r\text{-}var(a_9{}^{I}=1, a_9{}^{II}=0{,}4)$; $a_{10}=e_1e_2$; $a_{11}=e_1e_2v_2{}^2k_2$; $a_{12}=e_1v_1$; $a_{13}=e_2e_1k_1v_1{}^2$; $a_{14}=e_2v_1$; $a_{15}=v_1{}^2 e_1 k_1 v_2$; $a_{16}= v_2{}^2 e_2 k_2v_1$; $a_{17}=v_1v_2$.

В результате подстановок, включая $r= a_9$-var вместо двух пар уравнений, будем иметь для каждого случая по одному уравнению:

$$[\gamma^4a_9 a_1-\gamma^2 (a_9a_2+a_4)]+(a_5\gamma-a_3a_9\gamma^3)\mathrm{ctg}\gamma+(a_6\gamma \sqrt{a_9} -a_8\gamma^3 \sqrt{a_9})\mathrm{x}$$
$$\mathrm{xctg}(\gamma\sqrt{a_9})+(a_7\sqrt{a_9}\,\gamma^2)\mathrm{ctg}\gamma\,\mathrm{ctg}(\gamma\sqrt{a_9})=0; \qquad (27)$$

и

$$-\gamma^2 \sqrt{a_9}\, a_{10}\,\mathrm{tg}\,\mathrm{tg}(\gamma\sqrt{a_9}) + [\gamma\sqrt{a_9}\, a_{11} - \gamma^3 \sqrt{a_9}\, a_{12}]\, \mathrm{tg}\gamma\sqrt{a_9}) +$$
$$+ (\gamma\, a_{13} - \gamma^3 a_9 a_{14})\,\mathrm{tg}\gamma +(a_{15} + a_{16}\, a_9)\,\gamma^2 - \gamma^4 a_9 a_{17} = 0. \qquad (28)$$

Для решения трансцендентных уравнений (27),(28) был использован алгоритм, реализующий вычисление первого наименьшего по модулю корня γ_1 на основе предельного соотношения [8].

$$\gamma_1{}^2= \lim_{n\longrightarrow\infty} \Omega_n/ \Omega_{n+1}\ , n=0,1,2,... \quad , \qquad (29)$$

где многочлены Ω_n функционально удовлетворяют рекурентному соотношению

$$\Omega_0=1/\varphi_0;\ \Omega_n= \sum_{n=1} (\varphi_n/\varphi_0)\,\Omega_{n-1}\,, \qquad (30)$$

а последовательность φ_n, несущая информацию об исходных уравнениях, определяется из алгоритма их представления в форме степенного ряда

$$f(\gamma)= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n\, \gamma^{2n} =0. \qquad (31)$$

Приведение уравнений (27),(28) к виду (31) проиллюстрируем на примере простейшего трансцендентного уравнения

$$\mathrm{ctg}\,\gamma = \gamma/B_i\,, \qquad (32)$$

где B_i - критерий БИО [9,10]. После тождественных преобразований получим

$f(\gamma) = \cos\gamma - (\gamma/B_i)\sin\gamma = 0.$ (33)

Воспользовавшись разложением тригонометрических функций в степенные ряды [7] , найдем

$\varphi_0 = 1$, $-\varphi_n = ((-1)^n/(2n)!)(1+2n/B_i).$ (34)

После аналогичных преобразований уравнений (27), (28) к виду (31) коэффициенты последовательностей φ_n выражаются через a_i (i = 1,2,...) следующим образом :

- для уравнений (27)

$$\varphi_0 = (a_2 + a_4)\varphi_{1,0} + a_5\ \varphi_{2,0} + a_6\ \varphi_{3,0} + a_7\varphi_{4,0};$$

$$\varphi_n = \{[(a_2 + a_4)\varphi_{1,n} - a_1\ \varphi_{1,n-1}] + [a_5\ \varphi_{2,n} - +a_3\varphi_{2,n-1}] + + [a_6\ \varphi_{3,n} - a_8\ \varphi_{3,n-1}] + a_7\varphi_{4,n}\}; \quad (35)$$

- для уравнения (28)

$$\varphi_0 = (a_{15} + a_{16})\varphi_{4,0} + a_{13}\varphi_{3,0} + a_{11}\sqrt{a_9}\varphi_{2,0} + a_{10}\sqrt{a_9}\varphi_{1,0};$$

$$\varphi_n = \{[(a_{15}+a_{16})\varphi_{4,n} - a_{17}a_9\varphi_{4,n-1} + [a_{13}\varphi_{3,n} - a_{14}a_9\varphi_{3,n-1}] + [a_{11}\sqrt{a_9}\varphi_{2,n} - a_{12}\sqrt{a_9}\varphi_{2,n-1}] + a_{10}\sqrt{a_9}\varphi_{1,n}\}, \quad (36)$$

где $\varphi_{1,n} = [(-1)^n/(2n)!]\,[(1+\sqrt{a_9})^{2n} - (1-\sqrt{a_9})^{2n}];$

$$\varphi_{2,n} = [(-1)^n/(2n+1)!]\,[(1+\sqrt{a_9})^{2n+1} - (1-\sqrt{a_9})^{2n+1}];$$

$$\varphi_{3,n} = [(-1)^n/(2n_{+1})!]\,[(1+\sqrt{a_9})^{2n+1} + (1-\sqrt{a_9})^{2n+1}]; \quad (37)$$

$$\varphi_{4,n} = [(-1)^n/(2n)!]\,[(1+\sqrt{a_9})^{2n} + (1-\sqrt{a_9})^{2n}].$$

Результаты расчетов по разработанной выше методике при определении первого корня уравнений (27) и (28) произведены для гидропривода с параметрами [1]: диаметр цилиндра $Д_ц$=4,5см; $F_п$=15,9см^2; $f_{тр1} = f_{тр2}$ =0,7805 см^2; $\ell_{тр1} = \ell_{тр2}$= 4 м;8 м;12 м;16 м;20 м; $\rho_ж$= 0,906x10^{-6}кГ/сек^2/см^4; Mn=0,403кГ/с^2/см; $L_{пп}$=11см; $L_{шт.п}$=14,4см; E_1=13840кгс/см^2 (0% нерастворенного воздуха); E_2=6000 кгс/см^2 (0,1% нерастворенного воздуха), $a_{1ск\ зв}$=1240 м/с.

Результаты расчетов сведены в таблицы и представлены графиками:

Таблица1. ***Уравнение (28), r=1***

$\ell_{тр}$, см	γ	ω , 1/с
400	0,5100	158
800	0,7588	118
1200	0,9136	94
1600	1,0192	80
2000	1,0957	68

Таблица 2. ***Уравнение (28), r=0,483***

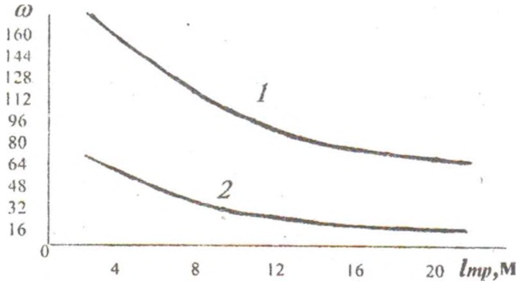
$\ell_{тр}$, см	γ	ω , 1/с
400	0,6612	205
800	0,9844	153
1200	1,1842	122
1600	1,3193	102
2000	1,4163	88

Таблица 3. ***Уравнение (27), r=1***

$\ell_{тр}$, см	γ	ω, 1/с
400	1,0740	333
800	1,2688	197
1200	1,3594	140
1600	1,4115	109
2000	1,4452	90

Таблица 4.***Уравнение (27), r=0,483***

$\ell_{тр}$, см	γ	ω, 1/с
400	1,1277	229
800	1,3570	138
1200	1,4670	99
1600	1,5313	78
2000	1,5734	64



1-график расчета ω по уравнению (28) данной работы,
2- график расчета ω по уравнению (23) работы [1].

Рис. 3. *Результаты расчетов*

Параметры гидроприводов, по условию, в обоих случаях равны. Из анализа результатов численного моделирования на ПЭВМ следует, что предел последовательности (29) обладает достаточно быстрой сходимостью к первому корню и может быть использован для построения приближенных методик .Введем следующие обозначения

$$\gamma^2_{1,0} = \Omega_0/\Omega_1\ , \qquad \gamma^2_{1,1} = \Omega_1/\Omega_2\ , \qquad \gamma^2_{1,2} = \Omega_2/\Omega_3\ . \qquad (38)$$

Замещая в (38) Ω_n по рекурентным формулам (30) , получим

$$\gamma^2_{1,0} = -\varphi_0/\varphi_1;$$
$$\gamma^2_{1,1} = -\varphi_0/(\varphi_1 + \gamma^2_{1,0}\,\varphi_2); \qquad (39)$$
$$\gamma^2_{1,2} = -\varphi_0/(\varphi_1 + \gamma^2_{1,1}\,(\varphi_2 + \gamma^2_{1,0}\,\varphi_3)).$$

Ограничившись в (39) конечным числом членов последовательности, т.е. приняв, например, за искомое значение корня соотношение

$$\gamma_1^2 \approx \gamma^2_{1,2} \qquad (40)$$

получим его приближенное выражение в замкнутом виде.Такой степени приближенности может оказаться достаточно для инженерной практики, что особенно актуально для многопараметрических трансцендентных уравнений типа (27),(28) и других с большим числом свободных параметров [8],[10].

В заключение заметим, что несовпадение расчетов, приведенных в табл.1 с аналогичными результатами из работы [1], по видимому, объясняется разной концепцией построения математических моделей.

Оценку разных математических моделей гидропривода можно провести только путем сравнения результатов расчетов, произведенных на их основе, с экспериментальными данными, полученными на реальном гидроприводе с аналогичными параметрами.

Определение собственных частот колебаний гидропривода необходимо при создании систем автоматического регулирования точных и ответственных гидроприводов , например в станкостроении , буровых установках с гидроподачей , системах пилотирования разного назначения и т.д.

В связи с этим работа должна быть продолжена и результаты расчетов сравнены с экспериментальными данными.

Литература

1. Цуханова Е.А., Яншина М.А. Определение собственных частот колебаний поршня и жидкости в магистралях гидропривода-М.: Машиностроение,1974. -№3.- С.32-38.

2. Тарко Л.М. Динамика гидропередачи с распределенными параметрами//Пневматика и гидравлика . Приводы и системы управления.-М.:Машиностроение, 1978.-Вып. 5. -С. 94-102.

3. Аксиально- поршневой регулируемый гидропривод / В.И. Прокофьев, Ю.А. Данилов, Л.А. Кондаков и др. -М.: Машиностроение, 1969. - 498 с.

4. Жуковский Н.Е. Работа сквозного и несквозного тяговых приборов при трогании поезда с места и в начале его движения: в 9 т. собр. соч. Т 3.- М.: ГИТТЛ, 1949. -700 с.

5. Кожевников С.Н. Динамика машин с упругими звеньями. -К.: Изд. АН УССР, 1961.-160 с.

6. Шмукин А.А. Определение первого корня характеристических уравнений в аналитической теории теплопроводности // Инж. Физ. журнал. -1976. -Т.27, №3.-С.533-534.

7. Маркушевич А.Н. Краткий курс теории аналитических функций. -М.: Наука, 1966.-327 с.

8. Чернов А.В., Бессеребренников Н.К., Силецкий В.С. Основы гидравлики и теплотехники. -М.: Энергия, 1975. -416 с.

9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. -М.: Наука, 1964. -3+44 с.

10. Лыков А.В. Теория теплопроводности. -М.: Высш.школа,1967.-600 с.

11. Коробочкин Л.Б. Динамика гидравлических систем станков. -М.: Машиностроение, 1976.-240 с.